

累乗・累乗根

第7回
2014.11.27

Key Word : 「自然対数」
「常用対数」
「2進法」
「10進法」

Q 累乗・累乗根ってなに？

A $\log_{10}100$ は底にある数字:10を2回かければ100になるので、答え(累乗数)は2である。
 $\sqrt[4]{16}$ にある4を累乗根と言い、4乗すれば16になる数を求めているので、答えは2である。「分かり難いよなあ！」

① 手打ちラーメン

馬賊というラーメン屋がある。練上げた小麦粉の塊を伸ばしてたたみ、1本を2本に、2本を4本にと増やしていく。これを20回やると総数は 2^{20} で、105万本になる。これは、2の20乗は105万と読む。「実際の作業は10回で、1024本で所かな？」

② 借入金の利息

ヤクザの世界に「トイチ」という言葉がある。これは10日で1割の利息がつくということ。これを10日複利で1ヶ月放置すれば1.33倍、1年放置すれば32倍にもなる。今は法律で年率で表現するように規制されている。年率10割の金利で1年借りると1年後には2倍になるということ。サラ金の常套手段として途中で借換えを迫る。半年でとなると5割だから1年後に 1.5×1.5 で、2倍が2.25倍に変わる勘定だ。

③ 自然対数・常用対数

上記サラ金の借金を毎日借換えて計算すると $(1+1/365)^{365}$ で、2.715倍になる。更に細かく借り換えると2.718倍。この数字を自然対数: $\log_e N$ の底(てい)と言う。これに対して10を底にしたもの ($\log_{10}N$) を常用対数と言い、 $\log_{10}100=2$ となる。常用対数の底は人間が創りだしたもので、10にはこだわらない。

④ 累乗根

$\log_{10}100=2$ をひっくり返した表示法で、 $\sqrt[2]{100} = 10$ 、 $\sqrt[3]{1000} = 10$ となり、それぞれ、100の2乗根は10、1000の3乗根は10と読む。

⑤ 10づくり遊び

以下 4つの数字を用いて、四則演算・対数・指数を用いて「10」をつくってみよう！

1, 2, 3, 4 ; $1+2+3+4=10$ $1*2*3+4=10$ $3^2+1^4=10$
1, 3, 5, 9 ; $5+9-3-1=10$ $9+1^{(3+5)}=10$ $1*5*\log_3 9=10$
1, 3, 5, 8 ; $5+8-3*1=10$ $5*(3-1^8)=10$ $1*5*\sqrt[3]{8} = 10$

⑥ N進法

0~9のアラビア語を用いた10を底とする位取り法を10進法という。ほかにも身近なところでは、2進法、12進法、16進法がある。この内、12進法については約数が多く、2分・4分できるから便利で、角度・時間、ならびに箱詰め製品などに活用されている。また2進法はコンピュータの分野で、光を通す通さない、電流を通す通さないで活用されている。ところでなぜ特色のない10進法が広まったのかは、たまたま人の指の数が10だったということらしい。去年の技術士一次試験に2進法が出た。以下がその写しである。

I - 2 - 1 数種類のランプを一行に並び、ランプを点けた状態 (ON) と消した状態 (OFF) を考える。例えば、2つのランプを使った場合には、次の4通りの状態を表現できる。

ランプ1	ランプ2
ON	ON
ON	OFF
OFF	ON
OFF	OFF

8個のランプを用いる場合には、4個のランプを用いる場合と比べて表現できる状態の数は何倍になるか。

- ① 2倍 ② 4倍 ③ 8倍 ④ 16倍 ⑤ 32倍

この問題 $2^8 / 2^4 = 256 / 16 = 16$ 倍として求めてもよいが、 $2^8 / 2^4 = 2^4 = 16$ 倍が正解

⑦ パチンコ遊び

4と9を使わないパチンコ屋で、最終番号が1000番であった。さてパチンコ台は何題あるのか？ 1000から400番台900番台の200を引いて、そこから400.900番台を除く40・90番台の160代を引いて、そこから、40・90番台を除く128番台を引いて512台とした人は頭涸やてるが電車に乗り遅れる。1000は10進法では10の3乗です。8進法では8の3乗=512台と気づくべき。上段技術士の試験で2進法に気づかぬ人は時間切れだったろうよ！

⑧ 確率問題

10進法の乱数表から、任意に抽出した数字がストレートになる確率は、 $10/10 \times 9/10 \times 8/10 \times 7/10 \times 6/10 \times 5/10 \times 4/10 \times 3/10 \times 2/10 \times 1/10 = 0.00036 \approx (4/10000)$ ほどとめったに出ない確率となっているが、この数字を大きい方からでも小さい方からでも順に並べた場合に限り、2倍・4倍・8倍してもまた2で除してもストレートになる。なぜだか教えて！

	10進数	12進数
ストレート数	1 2 3 4 5 6 7 8 9 0	1 2 3 4 5 6 7 8 9 a b 0
× 2	2 4 6 9 1 3 5 7 8 0	2 4 6 8 b 1 3 5 7 9 a 0
× 4	4 9 3 8 2 7 1 5 6 0	4 9 1 5 a 2 6 b 3 7 8 0
× 8	9 8 7 6 5 4 3 1 2 0	9 6 2 b 8 5 1 a 7 3 4 0
÷ 2	0 6 1 7 2 8 3 9 4 5	0 7 1 8 2 9 3 a 4 b 5 6

上表のごとく、10進数・12進数に限らず、ストレートが成り立つのが不思議でならない。

また、2進数を10進数に、10進数を2進数に読み替えるのはいともたやすいと思うフシがあるが、これが少数以下となると感覚だけでは読みきれない。以下のルールを知っておくと良い。

※ 10進数 (5.85) を2進数に変えるには、整数部と小数部を分けてみる必要がある。

- ・ 整数部
 - $5 \div 2 = 2 \dots 1$
 - $2 \div 2 = 1 \dots 0$
 - $1 \div 2 = 0 \dots 1$ よって整数部は 101
- ・ 小数部
 - $0.85 \div 0.5 = 1 \dots 0.35$
 - $0.35 \div 0.5^2 = 1 \dots 0.10$
 - $0.10 \div 0.5^3 = 0 \dots 0.10$
 - $0.10 \div 0.5^4 = 1 \dots 0.04$ よって整数部は 1101
- ・ 答え 101.1101

去年の技術士一次試験に2進法が出た。以下がその写しである。

I-2-5 基数変換に関する次の記述の、に入る語句の組合せとして、正しいものはどれか。

10進数の0.85を小数部4桁の2進数で表せばとなる（小数部5桁目以降は切り捨て）。このを0.5倍した結果はとなる（同じく小数部5桁目以降は切り捨て）。また、を10進数に変換するととなる。

	ア	イ	ウ
①	0.1101	0.0101	0.375
②	0.1101	0.0110	0.375
③	0.1101	0.0110	0.425
④	0.1010	0.0101	0.375
⑤	0.1010	0.0101	0.425

この問題 少数がゆえに面食らう向きもあろう！

※ 前記 10進数 : 0.830を2で除した場合を考えてみよう！

- ・ 小数部
 - $0.425 \div 0.5 = 0 \dots 0.425$
 - $0.425 \div 0.5^2 = 1 \dots 0.175$
 - $0.175 \div 0.5^3 = 1 \dots 0.050$
 - $0.050 \div 0.5^4 = 0 \dots 0.050$
 - $0.050 \div 0.5^5 = 1 \dots 0.019$
 - $0.019 \div 0.5^6 = 1 \dots 0.003$
 - $0.003 \div 0.5^7 = 0 \dots 0.003$

のごとく、0.830と同様に計算すれば求まるはずであるが、さてよ？
10進法で表された数字を10で除するとどうなるか考えてみよう！
いちいち計算してたら日が暮れちゃうよ！

※ 概数の概念

10進法では、頭の2桁を計算しておけばおおよその数字はつかめようものであるが、2進法ではそうは行かない。4桁、5桁計算しないと概数すら掴めない。上記小数(0.011011)の2桁を割り戻して0.375ではいけない。5桁割り戻しても0.422である。そもそも進法種によって結果が変わるわけなので計算すること自体ナンセンス。10進法の0.425は、何進法で計算しようと、10進法に割戻せば0.425でなければならない。