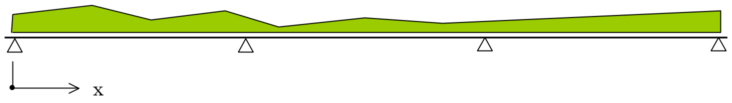
梁の荷重と、作用力・変位の関係

2009.6.26
S.T.

1．用語の説明

下図のような梁に載荷される荷重と作用力・変位には次なる因果関係がある。



① 荷　重　W(x)　：　梁の上に乗るものを「荷重（W）」という．

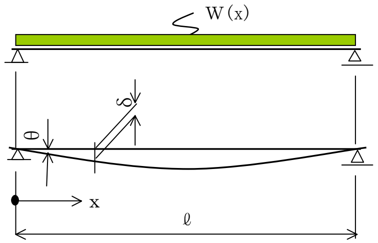
② せん断力　S(x)　：　梁を断ち切ろうとする力で、荷重を積分することで求められる。

③ 曲げモーメント　M(x)　：　梁を曲げようとする力で、せん断力を積分することで求められる。

④ たわみ角　θ(x)　：　変形した梁の勾配が基準線との間でなす角度で、曲げモーメントを梁の曲げ剛度で除したものを積分することで得られる。

⑤ た わ み　δ(x)　：　変形した梁の基準線からの離れで、たわみ角を積分することで得られる。

2．単純桁等分布荷重での例



① 任意点の荷重

$$W(x) = -q \qquad (1)$$

② 任意点のせん断力

$$S(x) = -q \cdot x + C_1 \qquad (2)$$

③ 任意点の曲げモーメント

$$M(x) = -1/2 \times q \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_2 \qquad (3)$$

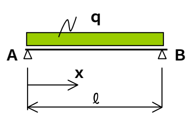
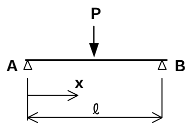
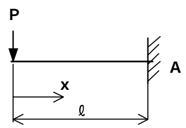
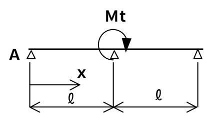
④ 任意点のたわみ角

$$\theta(x) = 1/EI \times (-1/6 \times q \cdot x^3 + 1/2 \times C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot x + C_3) \qquad (4)$$

⑤ 任意点のたわみ

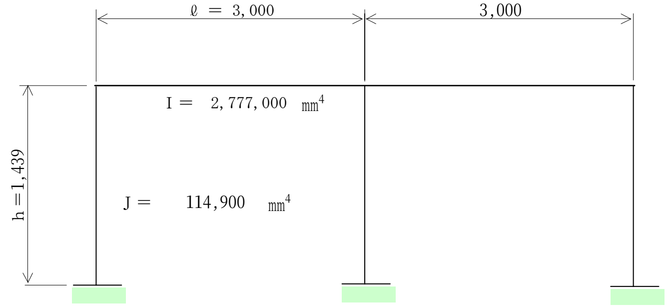
$$\delta(x) = 1/EI \times (-1/24 \times q \cdot x^4 + 1/6 \times C_1 \cdot x^3 + C_2 \cdot x^2 + C_3 x + C_4) \qquad (5)$$

3．いろんな形式の作用力と変状

載荷状態図	支点反力	せん断力 ── (2) 式	曲げモーメント ── (3) 式	たわみ角 ── (4) 式	たわみ ── (5) 式
	$C_1 = R_A$ $= \frac{q \cdot \ell}{2}$	$S(x) = -q \cdot x + C_1$ ここで、C_1：反力 $S(x) = -q \cdot x + \frac{q \cdot \ell}{2}$ $= \frac{q \cdot \ell}{2} \left(1 - \frac{2x}{\ell}\right)$	$M(x) = -1/2 \times q \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_2$ ここで、x＝0 のとき M＝0 より、C_2＝0 $M(x) = \frac{-q \cdot x^2}{2} + \frac{q \cdot \ell \cdot x}{2}$ $= \frac{q \cdot \ell^2}{2} \left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{\ell^2}\right)$	$\theta(x) = 1/EI \times (-1/6 \times q \cdot x^3 + 1/2 \times C_1 \cdot x^2 + C_3)$ ここで、C_3 については、たわみ値（右欄）の成果を活用 $\frac{1}{EI} \left(\frac{-q \cdot x^3}{6} + \frac{q \cdot \ell \cdot x^2}{4} - \frac{q \cdot \ell^3}{24}\right)$ $\frac{-q \cdot \ell^3}{24EI} \left(1 - 6\frac{x^2}{\ell^2} + 4\frac{x^3}{\ell^3}\right)$	$\delta(x) = 1/EI \times (-1/24 \times q \cdot x^4 + 1/6 \times C_1 \cdot x^3 + C_3 x + C_4)$ x＝0 のときδ＝0 より C_4＝0、 x＝ℓ のときδ＝0 より $C_3 = -q \cdot \ell^3/24$ $\delta(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{-q \cdot x^4}{24} + \frac{q \cdot \ell \cdot x^3}{12} - \frac{q \cdot \ell^3 \cdot x}{24}\right)$ $= \frac{-q \cdot \ell^4}{24EI} \left(\frac{x}{\ell} - 2\frac{x^3}{\ell^3} + \frac{x^4}{\ell^4}\right)$
	$C_1 = R_A$ $= \frac{P}{2}$	$S(x) = C_1$ ここで、C_1：反力 $S(x) = \frac{P}{2}$ (ただし、x≦ℓ/2の範囲)	$M(x) = C_1 \cdot x + C_2$ ここで、x＝0 のとき M＝0 より、C_2＝0 $M(x) = \frac{P \cdot x}{2}$	$\theta(x) = 1/EI \times (1/2 \times C_1 \cdot x^2 + C_3)$ ここで、x＝ℓ/2 のとき θ＝0 より、$C_3 = -P \cdot \ell^3/16$ $\frac{1}{EI} \left(\frac{P \cdot x^2}{4} - \frac{P \cdot \ell^2}{16}\right)$ $\frac{-P \cdot \ell^2}{16EI} \left(1 - 4\frac{x^2}{\ell^2}\right)$	$\delta(x) = 1/EI \times (1/6 \times C_1 \cdot x^3 + C_3 \cdot x + C_4)$ x＝0 のときδ＝0 より C_4＝0 $\delta(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{-P \cdot x^3}{12} + \frac{P \cdot \ell^2 \cdot x}{16}\right)$ $= \frac{-P \cdot \ell^3}{48EI} \left(3\frac{x}{\ell} - 4\frac{x^3}{\ell^3}\right)$
	$C_1 = R_A$ $= P$	$S(x) = C_1$ ここで、C_1：反力 $S(x) = P$	$M(x) = C_1 \cdot x + C_2$ ここで、x＝0 のとき M＝0 より、C_2＝0 $M(x) = P \cdot x$	$\theta(x) = 1/EI \times (1/2 \times C_1 \cdot x^2 + C_3)$ ここで、x＝ℓ のとき θ＝0 より、$C_3 = -P \cdot \ell^2/2$ $\frac{1}{EI} \left(\frac{P \cdot x^2}{2} - \frac{P \cdot \ell^2}{2}\right)$ $\frac{-P \cdot \ell^2}{2EI} \left(1 - \frac{x^2}{\ell^2}\right)$	$\delta(x) = 1/EI \times (1/6 \times C_1 \cdot x^3 + C_3 \cdot x + C_4)$ ここで、x＝ℓ のとき δ＝0 より、C4＝$-P \cdot \ell^3/3$ $\delta(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{-P \cdot x^3}{6} + \frac{P \cdot \ell^2 \cdot x}{2} - \frac{P \cdot \ell^3}{3}\right)$ $= \frac{-P \cdot \ell^3}{6EI} \left(2 - 3\frac{x}{\ell} + \frac{x^3}{\ell^3}\right)$ ──── (6)
	$C_1 = R_A$ $= \frac{Mt}{2\ell}$	$S(x) = C_1$ ここで、C_1：反力 $S(x) = \frac{Mt}{2\ell}$	$M(x) = C_1 \cdot x + C_2$ ここで、x＝0 のとき M＝0 より、C_2＝0 $M(x) = \frac{Mt}{2\ell} x$	$\theta(x) = 1/EI \times (1/2 \times C_1 \cdot x^2 + C_3)$ ここで、C_3 については、たわみ値（右欄）の成果を活用 $\frac{1}{EI} \left(\frac{Mt \cdot x^2}{4\ell} - \frac{Mt \cdot \ell}{12}\right)$ $\frac{-Mt \cdot \ell}{12EI} \left(1 - 3\frac{x^2}{\ell^2}\right)$ ──── (7)	$\delta(x) = 1/EI \times (1/6 \times C_1 \cdot x^3 + C_3 \cdot x + C_4)$ x＝0 のときδ＝0 より C_4＝0、 x＝ℓ のときδ＝0 より $C_3 = -Mt \cdot \ell/12$ $\delta(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{-Mt \cdot x^3}{12\ell} + \frac{Mt \cdot \ell \cdot x}{12}\right)$ $= \frac{Mt \cdot \ell^2}{12EI} \left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^3}{\ell^3}\right)$

防風柵支柱のねじれ座屈強度算定への活用

下図のように隣り合う支柱の天端を、横梁で連結したフレームを構成する支柱のねじり座屈の性状を検討する。

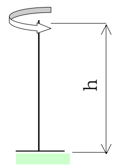


1． 対象とする支柱

風荷重によって大きな作用力を受ける中間支柱に着目する。

2． フレーム構成部材のねじれ易さ

① 支 柱



・ 支柱天端に 1 kN・m のねじりモーメントを与えた時の回転角

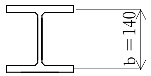
純ねじり剛度に対して

$$\theta_1 = \frac{Mt}{G\cdot K}\times h$$

$$= \frac{1{,}000{,}000}{7.7\times 10^4\times 114{,}900}\times 1{,}439 = 0.1626 \text{ rad}$$

フランジのそり抵抗に対して

フランジの断面二次モーメント



H. 150×150×7×10

$$I = \frac{10\times 150^3}{12} = 2{,}812{,}500 \text{ mm}^4$$

$$S = \frac{Mt}{b} = \frac{1{,}000{,}000}{140} = 7{,}143 \text{ N}$$

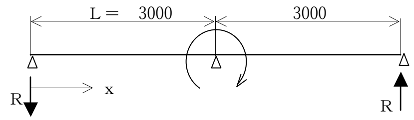
$$\delta = \frac{S\cdot h^3}{3EI} = \frac{7{,}143\times 1{,}439^3}{3\times 2.0\times 10^5\times 2{,}812{,}500} = 12.61 \text{ mm}$$

$$\theta_2 = \frac{\delta}{b/2} = \frac{12.61}{70} = 0.1802 \text{ rad}$$

・ 回転バネ定数

$$K_C = \frac{Mt}{\theta_1} + \frac{Mt}{\theta_2} = \frac{1.0}{0.1626} + \frac{1.0}{0.1802} = 11.70 \text{ kN·m/rad}$$

② 天端連結梁



$$R = \frac{Mt}{2L} = 0.167 \text{ kN} = S$$

$$Mx = S\cdot x$$

$$\theta = \frac{1}{E\cdot I}\left(\frac{S}{2}\cdot x^2 + C_1\right)$$

$$\delta = \frac{1}{E\cdot I}\left(\frac{S}{6}\cdot x^3 + C_1\cdot x + C_2\right)$$

x＝0.0、 3.0 mにおいて $\delta=0$ だから、

$$C_2=0 \qquad C_1 = -\left(\frac{S}{6}\times 3{,}000^3\right) / 3{,}000 = \frac{-9.0\times 10^6\times S}{6}$$

・ 梁に 1 kN･m の回転モーメントを与えた時の回転角

$$\theta = \frac{S}{E\cdot I}\left(\frac{9.0}{2} - \frac{9.0}{6}\right)\times 10^6 = \frac{3\times 10^6\times S}{E\cdot I}$$

$$= \frac{3\times 0.167\times 10^9}{2.0\times 10^5\times 2{,}777{,}000} = 9.0\times 10^{-4}$$

・ 回転バネ定数

$$K_B = \frac{Mt}{\theta} = \frac{1 \text{ kN·m}}{9.0\times 10^{-4}} = 1.111\times 10^3 \text{ kN·m/rad}$$

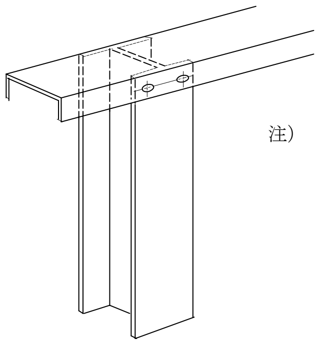
3． 横梁の支柱天端回転拘束力評価

支柱天端のねじれに対するバネ定数と連結梁の同バネ定数の比率を以って評価するが、後者の定数が前者の定数を十分に上回れば、その拘束力が認められる。

ここでは、K_B/K_Cが10以上であれば十分な回転拘束があるものとして、支柱のねじり座屈長として支柱高さを用いるものとする。

$$K_B/K_C = \frac{1.111\times 10^3}{11.70} = 95.0 > 10$$

よって当該支柱のねじれ座屈長は、支柱高さとして H＝1,439 mm を用いる。



注） 柱天端を梁によって回転拘束しているというためには、梁の曲げ剛度が十分であるばかりでなく、図のように支柱と梁が回転に対して結合されていることが条件となる。